**Практичне заняття №2. Асимптотична складність алгоритмів. Інші нотації.**

**Завдання 1:**

lim(𝑛→∞) 𝑓(𝑛)/𝑔(𝑛)

= lim(𝑛→∞) (𝑛^3 + 2𝑛^2 − 5𝑛 + 8)/(𝑛^4)

Застосуємо правило Лопіталя, диференціюючи чисельник та знаменник окремо:

= lim(𝑛→∞) (3𝑛^2 + 4𝑛 − 5)/(4𝑛^3)

= lim(𝑛→∞) (6𝑛 + 4)/(12𝑛^2)

= lim(𝑛→∞) (6/12𝑛 + 4/12)/(1/12𝑛^2)

При 𝑛, що прямує до нескінченності, дріб (6/12𝑛 + 4/12)/(1/12𝑛^2) зводиться до нуля, оскільки степінь 𝑛 у знаменнику зростає швидше, ніж у чисельнику.

**Таким чином, границя дорівнює нулю, що означає, що 𝑓(𝑛) є O(𝑔(𝑛)).**

**Завдання 2:**

Щоб показати, що 𝑓(𝑛) є Θ(𝑔(𝑛)), ми повинні довести дві частини:

1. 𝑓(𝑛) є O(𝑔(𝑛)): Ми повинні знайти константу 𝑐₁ та натуральне число 𝑛₀, такі що для всіх натуральних чисел 𝑛 > 𝑛₀ виконується нерівність |𝑓(𝑛)| ≤ 𝑐₁|𝑔(𝑛)|.
2. 𝑓(𝑛) є Ω(𝑔(𝑛)): Ми повинні знайти константу 𝑐₂ та натуральне число 𝑛₀, такі що для всіх натуральних чисел 𝑛 > 𝑛₀ виконується нерівність |𝑓(𝑛)| ≥ 𝑐₂|𝑔(𝑛)|.

1. Застосуємо межу і обчислимо границю відношення 𝑓(𝑛)/𝑔(𝑛) при 𝑛, що прямує до нескінченності:  
lim(𝑛→∞) ((𝑛^4/8) - 12)/(𝑛^4)

lim(𝑛→∞) (1/8)

Отже, за означенням O-нотації, ми маємо |𝑓(𝑛)| ≤ (1/8)|𝑔(𝑛)| для всіх 𝑛 > 𝑛₀, де 𝑛₀ може бути будь-яким натуральним числом.

2. Знову обчислимо границю відношення 𝑓(𝑛)/𝑔(𝑛) при 𝑛, що прямує до нескінченності:

lim(𝑛→∞) ((𝑛^4/8) - 12)/(𝑛^4)

lim(𝑛→∞) (1/8)

При 𝑛, що прямує до нескінченності, перший дріб 1/8 залишається постійним. За означенням Ω-нотації, ми маємо |𝑓(𝑛)| ≥ (1/8)|𝑔(𝑛)| для всіх 𝑛 > 𝑛₀, де 𝑛₀ може бути будь-яким натуральним числом.

**Отже, доведено, що 𝑓(𝑛) є Θ(𝑔(𝑛)), оскільки одночасно виконуються обидві умови: 𝑓(𝑛) є O(𝑔(𝑛)) та 𝑓(𝑛) є Ω(𝑔(𝑛)).**

**Завдання 3:**

𝑓(𝑛) = 5(log2(𝑛))^2

𝑔(𝑛) = log2(𝑛)

Обчислимо границю відношення f(n)/g(n):

lim(𝑛→∞) (5(log2(𝑛))^2)/(log2(𝑛))

lim(𝑛→∞) (10log2(𝑛))/(1/𝑛)

lim(𝑛→∞) 10𝑛log2(𝑛)

Тепер застосуємо іншу межу, замінюючи log2(𝑛) на 𝑥:

lim(𝑥→∞) 10𝑥

При 𝑥, що прямує до нескінченності, вираз 10𝑥 зростає нескінченно.

Отже, отримуємо:

lim(𝑛→∞) 𝑓(𝑛)/𝑔(𝑛) = ∞

**Це означає, що для доведення 𝑓(𝑛) є Ω(𝑔(𝑛)), ми можемо вибрати будь-яку константу 𝑐 > 0 і знайти таке натуральне число 𝑛₀, що |𝑓(𝑛)| ≥ 𝑐|𝑔(𝑛)| для всіх 𝑛 > 𝑛₀.**

**Отже, ми довели, що 𝑓(𝑛) є Ω(𝑔(𝑛)).**